

Elektrotechnik – 6. Wechselstrom

Luft- und Raumfahrttechnik Bachelor, 1. Semester

David Straub

6. Wechselstrom

1. Grundlegende Begriffe und Kennwerte
2. Komplexe Wechselstromrechnung
3. Wechselstromwiderstände (Impedanz, Admittanz)
4. Grundsaltungen
5. Leistung (Wirk-, Blind-, Scheinleistung)
6. Blindleistungskompensation
7. Resonanz und Frequenzverhalten

Wechselstrom: Grundlagen

Periodische Größen:

- Sich zeitlich wiederholende physikalische Größen
- Periodendauer $T \rightarrow u(t) = u(t + T)$
- Frequenz: $f = \frac{1}{T}$, Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi f$

Wechselgrößen:

Periodische elektrische Größen mit verschwindendem arithmetischem Mittelwert

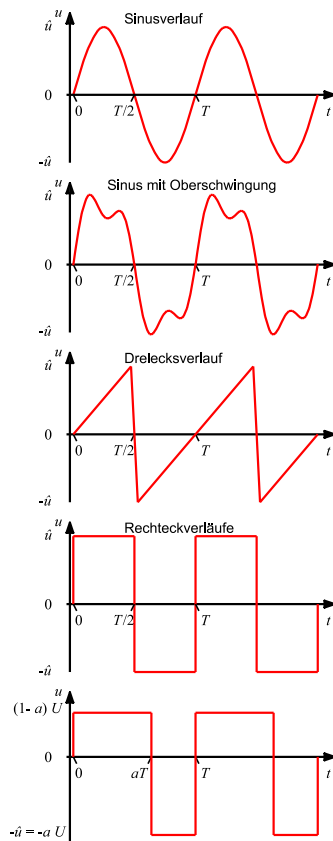


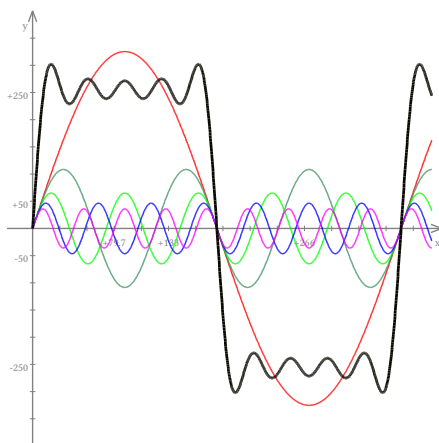
Abbildung 1: bg right:30% fit

Wechselgrößen: Eigenschaften

Fourier-Analyse: Jede Wechselgröße kann als Überlagerung von Sinusvorgängen dargestellt werden

$$a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n \cdot \sin(n \cdot \omega t + \varphi_n)$$

→ Es genügt, **sinusförmige** Größen zu verstehen!



Arithmetischer Mittelwert

Definition:

$$\bar{a} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} a(t) dt$$

Für sinusförmige Wechselgrößen $a(t) = \hat{A} \cdot \sin(\omega t + \varphi_a)$ gilt:

$$\bar{a} = 0$$

Gleichrichtwert

Definition:

$$|\overline{a}| = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} |a(t)| dt$$

Für sinusförmige Wechselgrößen:

$$|\overline{a}| = \frac{2}{\pi} \cdot \hat{A} \approx 0,637 \cdot \hat{A}$$

Effektivwert: Definition

Physikalischer Hintergrund: derjenige Wert einer Wechselgröße, der in seiner Wirkung bei Energieumformung einem Gleichstrom entspricht:

$$W_{\text{el}} = I^2 \cdot R \cdot T \stackrel{!}{=} \int_0^T i^2(t) \cdot R dt \Rightarrow I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

Allgemeine Definition (quadratischer Mittelwert, *RMS*):

$$A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} a^2(t) dt}$$

Effektivwert für Sinusschwingungen

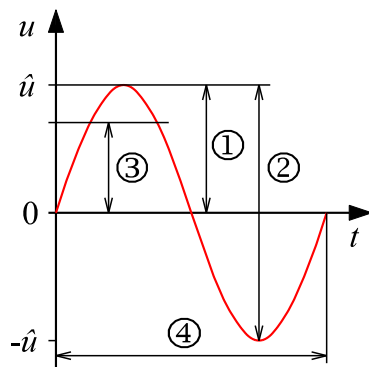
$$A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \hat{A}^2 \cdot \sin^2(\omega t) dt} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \cdot \hat{A}$$

Beispiele:

- Netzspannung: $U_{\text{eff}} = 230 \text{ V} \rightarrow \hat{U} = \sqrt{2} \cdot 230 \text{ V} = 325 \text{ V}$

- Haushaltssicherung: $I_{\text{eff}} = 16 \text{ A} \rightarrow \hat{I} = 22,6 \text{ A}$

Der Effektivwert wird von Messgeräten angezeigt!



Zusammenfassung: Kennwerte von Wechselgrößen

Kennwert	Formel	Für Sinusfunktion
Arithmetischer Mittelwert	$\bar{a} = \frac{1}{T} \int a(t) dt$	$\bar{a} = 0$
Gleichrichtwert	$\ a\ = \frac{1}{T} \int \ a(t)\ dt$	$\approx 0,637 \cdot \hat{A}$
Effektivwert	$A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int a^2(t) dt}$	$\frac{\hat{A}}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \cdot \hat{A}$

Notation ab jetzt: Kleinbuchstaben $u(t), i(t)$ = Zeitverläufe; $\hat{U}, \hat{I}$ = Amplituden; U, I (ohne Index!) = Effektivwerte



Jetzt sind Sie dran: Effektivwert (zu zweit)

Aufgabe 17

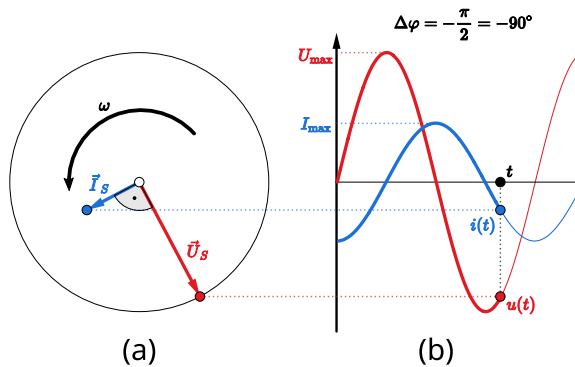
- Ein Oszilloskop zeigt eine sinusförmige Spannung mit Spitzenwert $\hat{U} = 17 \text{ V}$. Was zeigt ein Multimeter an?
- Eine Rechteckspannung springt periodisch zwischen $+10 \text{ V}$ und -10 V (je halbe Periode). Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert, den Gleichrichtwert und den Effektivwert **aus den Definitionen**.
- Warum gilt die Faustregel $A_{\text{eff}} = \hat{A}/\sqrt{2}$ hier nicht?

Zeigerdarstellung

Sinusförmige Wechselgrößen können als rotierende Zeiger in der komplexen Ebene dargestellt werden.

Zeigereigenschaften:

- Winkelgeschwindigkeit: $\omega = 2\pi f$
- Länge: Amplitude (oder Effektivwert, s.u.)
- Winkel zum Zeitpunkt $t = 0$: φ_u

**Komplexe Darstellung**

Anstatt mit trigonometrischen Funktionen zu rechnen, verwenden wir die Exponentialfunktion:

$$\underline{u}(t) = \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \underbrace{\hat{U} e^{j\varphi_u}}_{\text{Festzeiger } \underline{U}} \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Drehzeiger}}$$

Reale Zeitfunktion:

$$u(t) = \text{Re } \underline{u}(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$$

Bei **einer** festen Frequenz rotieren alle Zeiger gleich schnell $\rightarrow$ der Faktor $e^{j\omega t}$ kürzt sich aus allen Gleichungen $\rightarrow$ wir rechnen nur mit **Festzeigern**!

! Konvention: Amplituden- oder Effektivwertzeiger?

Zwei verbreitete Konventionen für die Zeigerlänge:

- **Amplitudenzeiger:** $\underline{U} = \hat{U} e^{j\varphi_u}$
- **Effektivwertzeiger:** $\underline{U} = U e^{j\varphi_u}$ mit $U = \hat{U} / \sqrt{2}$

In der Prüfung (und in der Energietechnik allgemein) sind **Effektivwertzeiger** üblich: „ $\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u} = 8 \text{ V} \cdot e^{j\pi/2}$ (komplexer Effektivwert)“.

Für Impedanzen ist es egal (Quotient!) – für die **Leistung** nicht: $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$ gilt mit Effektivwertzeigern (mit Amplitudenzeigern: Faktor $\frac{1}{2}$).

Komplexe Zahlen: Grundlagen

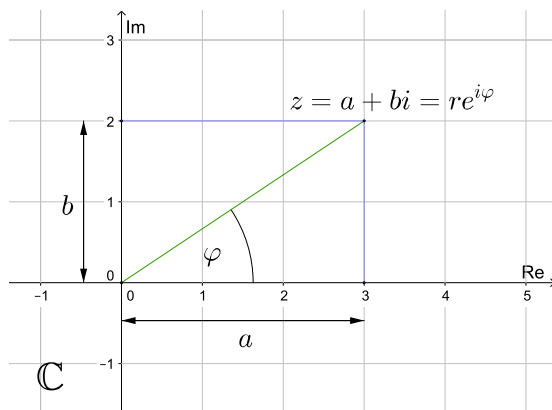
Imaginäre Einheit (in der Elektrotechnik als j notiert – i ist der Strom!):

$$j = \sqrt{-1}, \quad j^2 = -1$$

Komplexe Zahl:

$$\underline{z} = a + jb$$

mit Realteil $a = \operatorname{Re} \underline{z}$ und Imaginärteil $b = \operatorname{Im} \underline{z}$

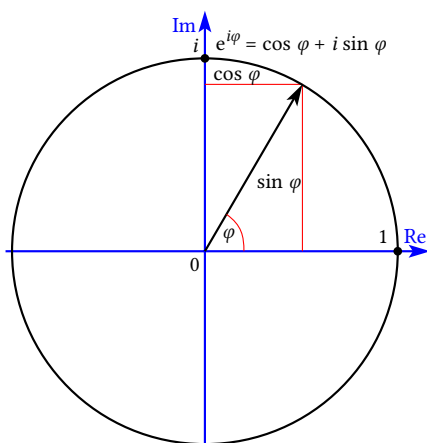


Euler'sche Formel

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$$

Wichtige Spezialfälle (auswendig!):

- $e^{j0} = 1$
- $e^{j\pi/2} = j$
- $e^{j\pi} = -1$
- $e^{j3\pi/2} = e^{-j\pi/2} = -j$



Darstellungsformen

Komponentenform (kartesisch): $\underline{Z} = R + jX$

Polarform (Exponentialform): $\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$

Umrechnung:

- Betrag: $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$
- Phase: $\varphi = \arctan\left(\frac{X}{R}\right)$ (Quadrant prüfen!)
- Realteil: $R = Z \cos \varphi$; Imaginärteil: $X = Z \sin \varphi$

Konjugiert komplexe Zahl

$$\underline{Z} = R + jX \Rightarrow \underline{Z}^* = R - jX$$

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi} \Rightarrow \underline{Z}^* = Z \cdot e^{-j\varphi}$$

Eigenschaften:

- $\underline{Z} \cdot \underline{Z}^* = |\underline{Z}|^2 = Z^2$ (reell!)
- $\operatorname{Re} \underline{Z} = \frac{\underline{Z} + \underline{Z}^*}{2}$

Rechenregeln

Addition/Subtraktion → Komponentenform:

$$\underline{Z}_1 \pm \underline{Z}_2 = (R_1 \pm R_2) + j(X_1 \pm X_2)$$

Multiplikation → Polarform: Beträge multiplizieren, Phasen **addieren**:

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = Z_1 Z_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Division → Polarform: Beträge dividieren, Phasen **subtrahieren**:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

(in Komponentenform: mit konjugiertem Nenner erweitern)

Faustregel: addieren kartesisch, multiplizieren polar!



Jetzt sind Sie dran: Komplexe Zahlen (zu zweit)

Aufgabe 18

Gegeben: $u(t) = 325 \text{ V} \cdot \cos(\omega t)$ und $i(t) = 10 \text{ A} \cdot \sin(\omega t)$ (Hinweis: $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - 90^\circ)$)

- Zeichnen Sie beide Größen als **Zeiger** im Zeigerdiagramm.
- Stellen Sie $\underline{U}$ und $\underline{I}$ in **kartesischer Form** dar.
- Wandeln Sie beide in **Polarform** um.
- Berechnen Sie $\underline{U} \cdot \underline{I}^*$ in beiden Darstellungen.
- Vergleichen Sie die Ergebnisse: Was fällt auf?

Grundelemente im Wechselstromkreis

Die drei Grundelemente im Wechselstromkreis sind:

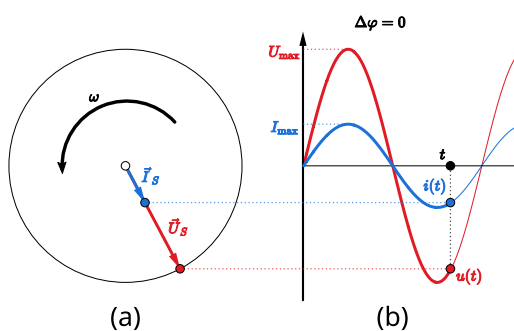
- Ohmscher Widerstand R 
- Kapazität C 
- Induktivität L 

Ohmscher Widerstand

Mit $u = R \cdot i$ und sinusförmigen Verläufen folgt:

$$\hat{U} = R \cdot \hat{I}, \quad \varphi_u = \varphi_i$$

Bei ohmschen Widerständen sind Strom und Spannung in Phase.



Leistung am ohmschen Widerstand

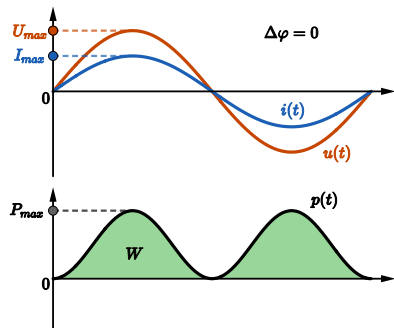
Momentanleistung (für $\varphi_u = \varphi_i = 0$):

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{U} \hat{I} \sin^2(\omega t) = \frac{\hat{U} \hat{I}}{2} (1 - \cos(2\omega t)) \geq 0$$

Mittlere Leistung:

$$\bar{P} = \frac{\hat{U}\hat{I}}{2} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$$

Leistung wird ständig verbraucht → Wirkwiderstand



Beispiel: Einphasiges Laden von E-Autos

Ein Elektrofahrzeug wird mit Wechselstrom bei $U_{\text{eff}} = 230 \text{ V}$ und $I_{\text{eff}} = 16 \text{ A}$ geladen:

$$P = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = 3680 \text{ W} \approx 3,7 \text{ kW}$$

- Ladedauer für 40-kWh-Akku: ca. 11 Stunden
- Bei $I_{\text{eff}} = 32 \text{ A}$: $P \approx 7,4 \text{ kW}$



Abbildung 2: bg right:40% cover

Kondensator im Wechselstromkreis

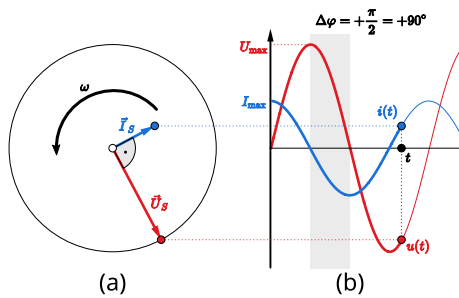
Die Änderung der Ladung ist der Strom:

$$i = \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{du}{dt}$$

Einsetzen der Sinusverläufe ($\rightarrow$ Tafel) liefert:

- Amplituden: $\frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{1}{\omega C}$
- Phasen: $\varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$

Am Kondensator eilt der Strom der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ voraus.

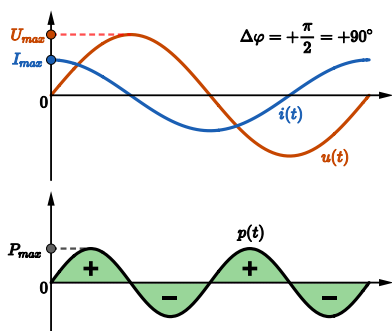


Leistung am Kondensator

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cdot \sin(2\omega t)$$

- Positive Leistung: Aufladen; negative: Entladen
- **Mittlere Leistung:** $\bar{p} = 0$

$\rightarrow$ **Blindwiderstand:** Energie pendelt zwischen Quelle und elektrischem Feld



Induktivität im Wechselstromkreis

Grundgleichung (Selbstinduktion, Kapitel 5!):

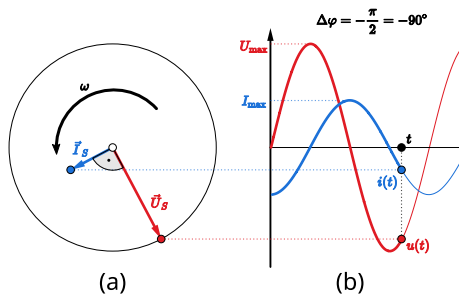
$$u = L \cdot \frac{di}{dt}$$

Einsetzen der Sinusverläufe liefert:

- Amplituden: $\frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \omega L$
- Phasen: $\varphi_u - \varphi_i = +\frac{\pi}{2}$

An der Induktivität eilt die Spannung dem Strom um $\frac{\pi}{2}$ voraus.

Merkspruch: „Bei Induktivitäten die Ströme sich verspäten; im Kondensator eilt der Strom vor.“

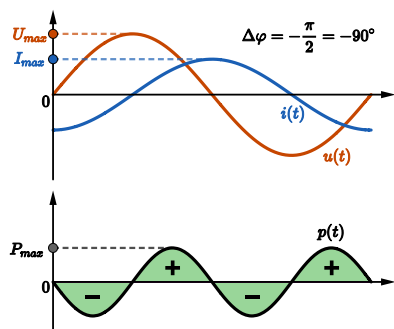


Leistung an der Induktivität

$$p(t) = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cdot \sin(2\omega t)$$

- Positive Leistung: Aufbau des Magnetfelds; negative: Abbau
- **Mittlere Leistung:** $\bar{p} = 0$

→ **Blindwiderstand:** Energie pendelt zwischen Quelle und Magnetfeld



Impedanz & Admittanz

Impedanz (komplexer Widerstand):

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

Admittanz (komplexer Leitwert):

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

Ohm'sches Gesetz, Kirchhoff, Reihen-/Parallelschaltung, Teiler, Zweipoltheorie – alles gilt weiter, nur mit komplexen Größen!

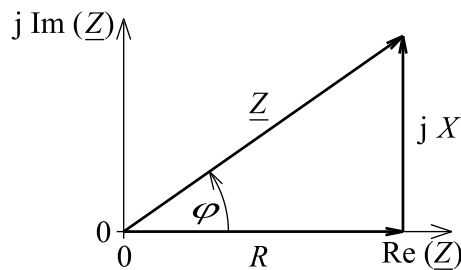


Abbildung 3: bg right:40% fit

Impedanzen der Grundelemente

Ohmscher Widerstand: $\underline{Z}_R = R$

Kapazität (Strom eilt vor):

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}, \quad \underline{Y}_C = j\omega C$$

Induktivität (Spannung eilt vor):

$$\underline{Z}_L = j\omega L, \quad \underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L}$$

	R	C	L
$\underline{Z}$	R	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega L$
$\underline{Y}$	$\frac{1}{R}$	$j\omega C$	$\frac{1}{j\omega L}$

Serienschaltung R und L

Komplexe Maschenregel:

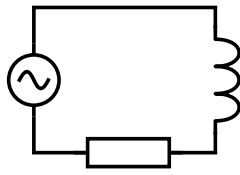
$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = (R + j\omega L) \cdot \underline{I}$$

Impedanz:

$$\underline{Z} = R + j\omega L$$

Betrag und Phase:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{\omega L}{R}$$



Parallelschaltung R und L

Komplexe Knotenregel:

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L = \underline{Y} \cdot \underline{U}$$

Admittanz (parallel $\rightarrow$ Admittanzen addieren!):

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} - j \frac{1}{\omega L}$$

Betrag und Phase:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\omega L)^2}}}, \quad \varphi = \arctan \frac{R}{\omega L}$$

Serienschaltung / Parallelschaltung R und C

Serie:

$$\underline{Z} = R - j \frac{1}{\omega C}, \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \varphi = -\arctan \frac{1}{\omega CR}$$

Parallel:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}}, \quad \varphi = -\arctan(\omega CR)$$

Vorzeichen von φ : **kapazitiv $\rightarrow$ negativ, induktiv $\rightarrow$ positiv**

Übersichtstabelle Grundsaltungen

Schaltung	$\underline{Z}$	$\underline{Y}$	$\ Z \ $	φ
R-L Serie	$R + j\omega L$	$\frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$	$\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$	$\arctan \frac{\omega L}{R}$
R-L Parallel	$\frac{\omega L R (\omega L + jR)}{R^2 + \omega^2 L^2}$	$\frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L}$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\omega L)^2}}}$	$\arctan \frac{R}{\omega L}$
R-C Serie	$R - j\frac{1}{\omega C}$	$\frac{\omega C (\omega C R + j)}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$	$\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$	$-\arctan \frac{1}{\omega C R}$
R-C Parallel	$\frac{R(1 - j\omega C R)}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$	$\frac{1}{R} + j\omega C$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}}$	$-\arctan \omega C R$



Jetzt sind Sie dran: RL-Schaltung komplett (zu zweit)

Aufgabe 19 (Klausur-Grundmuster – mit Zeigerdiagramm!)

Eine Reihenschaltung aus $R = 40 \, \Omega$ und einer Spule mit $\omega L = 30 \, \Omega$ liegt an $\underline{U} = 10 \, \text{V} \cdot e^{j0}$ (komplexer Effektivwert).

- Berechnen Sie $\underline{Z}$ in Komponenten- und Polarform.
- Berechnen Sie den Strom $\underline{I}$ sowie $\underline{U}_R$ und $\underline{U}_L$.
- Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm** mit $\underline{U}$, $\underline{I}$, $\underline{U}_R$, $\underline{U}_L$ (Achsen skalieren!).
- Geben Sie für den Strom an: Effektivwert I , Amplitude $\hat{I}$ und Phase φ_i .

Rückblick: Leistung an R, L und C

Am Widerstand R: $\bar{p} = UI$ – Energie wird verbraucht, $\varphi = 0^\circ$

An C und L: $\bar{p} = 0$ – Energie pendelt, $\varphi = \mp 90^\circ$

In der Praxis: Kombinationen aus R, L, C mit **beliebiger Phasenverschiebung** $0^\circ < |\varphi| < 90^\circ$
(Motor: $\varphi \approx 30^\circ - 60^\circ$; Netzteil: R-C)

Frage: Wie berechnet man die Leistung bei beliebigem φ ?

Momentanleistung mit Phasenverschiebung

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{U} \cos(\omega t) \cdot \hat{I} \cos(\omega t - \varphi)$$

Mit trigonometrischer Umformung und Effektivwerten U , I :

$$p(t) = \underbrace{UI \cos \varphi}_{P} \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + \underbrace{UI \sin \varphi}_{Q} \cdot \sin(2\omega t)$$

- Die Leistung oszilliert mit **doppelter Frequenz**

- Ein **konstanter** Anteil (wird verbraucht) + ein **pendelnder** Anteil (Mittelwert 0)

Wirk-, Blind- und Scheinleistung

Wirkleistung (Mittelwert, tatsächlich umgesetzt):

$$\boxed{P = UI \cos \varphi} \quad [P] = \text{W}$$

Blindleistung (pendelnder Energiefluss):

$$\boxed{Q = UI \sin \varphi} \quad [Q] = \text{var}$$

Scheinleistung (Netzbelastung, Dimensionierung!):

$$\boxed{S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}} \quad [S] = \text{VA}$$

Vorzeichen von Q : induktiv **positiv**, kapazitiv **negativ**.

Blindleistung: Praktische Bedeutung

Blindleistung trägt **nicht** zur nutzbaren Leistung bei, belastet aber das Netz:

- Höhere Ströme in Leitungen und Transformatoren
- Erhöhte Verluste: $P_{\text{Verlust}} = R \cdot I^2$
- Spannungsabfälle im Netz

Beispiel Transformator mit $S_{\text{max}} = 10 \text{ kVA}$: bei $\cos \varphi = 0,7$ liefert er nur $P = 7 \text{ kW}$ – voll ausgelastet, aber 30 % „verschenkt“.

Konsequenz: Industriekunden zahlen Strafgeldern bei $\cos \varphi < 0,9$.

Komplexe Scheinleistung: Motivation

Naiver Ansatz: $\underline{U} \cdot \underline{I} = UI \cdot e^{j(\varphi_u + \varphi_i)}$ – die Phasen *addieren* sich $\rightarrow$ **falsch!**

Wir brauchen die *Differenz* $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$.

Lösung: konjugiert komplexer Strom

$$\underline{U} \cdot \underline{I}^* = U e^{j\varphi_u} \cdot I e^{-j\varphi_i} = UI \cdot e^{j\varphi} = \underbrace{UI \cos \varphi}_P + j \underbrace{UI \sin \varphi}_Q$$

Definition der komplexen Scheinleistung

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = P + jQ$$

- **Betrag:** $S = |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$
- **Phase:** $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

Alternative Darstellungen:

$$\underline{S} = \underline{Z} \cdot I^2 = \frac{U^2}{\underline{Z}^*}$$

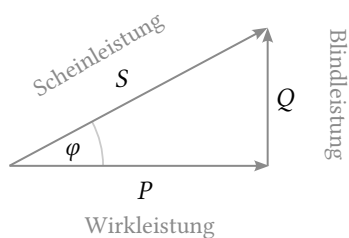
Beispiel RL-Reihenschaltung: $\underline{S} = I^2(R + j\omega L)$ – Realteil = Wirkleistung an R, Imaginärteil = Blindleistung an L. **Am Vorzeichen von $\text{Im } \underline{S}$ erkennt man die Impedanzcharakteristik** (+ induktiv, – kapazitiv)!

Leistungsdreieck

Das **Leistungsdreieck** visualisiert den Zusammenhang:

- Wirkleistung: $P = S \cos \varphi$
- Blindleistung: $Q = S \sin \varphi$
- Scheinleistung: $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$
- Phasenwinkel: $\tan \varphi = \frac{Q}{P}$

Beispiel Industriebetrieb: $P = 800 \text{ kW}$, $Q = 600 \text{ kvar} \rightarrow S = 1000 \text{ kVA}$, $\varphi \approx 37^\circ$ – der Trafo muss für 1000 kVA ausgelegt sein!



Leistungsfaktor $\cos \varphi$

$$\lambda = \cos \varphi = \frac{P}{S}$$

Verbraucher	$\cos \varphi$	Bemerkung
Glühbirne, Heizung	$\approx 1,0$	rein ohmsch
Motor ohne Last	$\approx 0,3$	viel Magnetisierung
Motor Vollast	$\approx 0,85$	besser, aber nicht ideal
Transformator	$\approx 0,8-0,9$	Streuinduktivität
Modernes Netzteil (PFC)	$> 0,95$	mit Kompensation

Energieversorger fordern $\cos \varphi > 0,9$; bei $\cos \varphi = 0,7$ statt $0,95$ fließt **26 % mehr Strom** für dieselbe Wirkleistung.

Blindleistungskompensation

Problem bei induktiven Verbrauchern (Motoren, Trafos): $Q_L > 0$, niedriger $\cos \varphi$, hohe Ströme, Strafzahlungen.

Lösung: Kondensatoren **parallel** schalten – $Q_C < 0$ kompensiert $Q_L > 0$:

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = P \cdot (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2)$$

(φ_1 : vorher, φ_2 : Ziel; vollständige Kompensation: $\varphi_2 = 0$)

Warum parallel? Damit die Spannung am Verbraucher – und damit seine Wirkleistung – unverändert bleibt!

Kompensation: Praxisbeispiel

Betrieb: $P = 100 \text{ kW}$, $\cos \varphi_1 = 0,8$ ($\varphi_1 \approx 37^\circ$), $U = 400 \text{ V}$

Vorher: $Q_L = 75 \text{ kvar}$, $S_1 = 125 \text{ kVA}$, $I_1 = 312 \text{ A}$

Kompensation auf $\cos \varphi_2 = 1$: $Q_C = -75 \text{ kvar}$

Nachher: $S_2 = P = 100 \text{ kVA}$, $I_2 = 250 \text{ A}$

- Strom: **-20 %**, Leitungsverluste ($\propto I^2$): **-36 %**, keine Strafzahlungen



Jetzt sind Sie dran: Leuchtstoffröhre (zu zweit)

Aufgabe 20 (= Palme B5, Aufgabe 2 – kompletter Klausur-Durchlauf)

Eine Leuchtstoffröhre mit Vorschaltdrossel (= Reihenschaltung aus R und L ; $P = 40 \text{ W}$, $I = 0,4 \text{ A}$) liegt am Netz ($U = 230 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$).

- a) Wie hoch ist die Scheinleistung S ? Wie groß ist $\cos \varphi$?

- b) Wie groß sind R und ωL ?
- c) Ein Kondensator soll die gesamte Blindleistung kompensieren. Wie muss er geschaltet werden (Begründung)?
- d) Berechnen Sie C .
- e) Veranschaulichen Sie die Kompensation im Zeigerdiagramm.

Resonanz: Der Serienschwingkreis

Reihenschaltung aus R , L und C :

$$\underline{Z}(\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Bei der **Resonanzfrequenz** heben sich X_L und X_C auf:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Bei ω_0 :

- $\underline{Z} = R$ – **rein reell**, minimal $\rightarrow$ Strom maximal
- Der Zweipol nimmt **nur Wirkleistung** auf ($Q = 0$)

Klausur-Formulierung: „Bei welcher Frequenz nimmt die Schaltung nur Wirkleistung auf? Wie nennt man diesen Arbeitspunkt?“ $\rightarrow$ **Resonanz!**

Resonanz: Der Parallelschwingkreis

L und C parallel (ggf. mit R):

$$\underline{Y}(\omega) = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Bei $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$:

- $\underline{Y}$ minimal $\rightarrow \underline{Z}$ **maximal**, rein reell
- Strom von außen minimal – L und C tauschen ihre Energie *untereinander* aus (Kreisstrom!)

Serienresonanz: $\underline{Z}$ **minimal** • Parallelresonanz: $\underline{Z}$ **maximal** – beide: $\underline{Z}$ reell, $Q = 0$

Impedanzcharakteristik

Wie „verhält sich“ ein Zweipol bei gegebener Frequenz?

- $\text{Im } \underline{Z} > 0$ (bzw. $\varphi > 0$, $\text{Im } \underline{S} > 0$): **induktiv**

- $\text{Im } \underline{Z} < 0$: **kapazitiv**
- $\text{Im } \underline{Z} = 0$: **reell** – Resonanzfall (oder rein ohmsch)

Beispiel Serienschwingkreis:

- $\omega < \omega_0$: $\frac{1}{\omega C} > \omega L \rightarrow$ **kapazitiv**
- $\omega > \omega_0$: $\rightarrow$ **induktiv**

Klausur-Frage: „Welche Impedanzcharakteristik weist der Zweipol auf (Begründung)?“ $\rightarrow$ Vorzeichen von $\text{Im } \underline{Z}$ oder $\text{Im } \underline{S}$ angeben!

Frequenzverhalten: Die Grenzfälle $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$

Mächtige Kontrolltechnik (und Klausur-Standardfrage!): ersetze die Blindelemente durch ihre Grenzfälle –

	$\omega \rightarrow 0$ (Gleichstrom)	$\omega \rightarrow \infty$
Kondensator ($Z_C = \frac{1}{\omega C}$)	Unterbrechung ($Z \rightarrow \infty$)	Kurzschluss ($Z \rightarrow 0$)
Spule ($Z_L = \omega L$)	Kurzschluss ($Z \rightarrow 0$)	Unterbrechung ($Z \rightarrow \infty$)

Vorgehen: Schaltung zweimal neu zeichnen (einmal pro Grenzfall), Blindelemente ersetzen, Verhalten ablesen.

So erklärt man die **Filterwirkung** einer Schaltung: Was passiert mit dem Ausgangssignal bei tiefen/hohen Frequenzen? (Tiefpass, Hochpass, ...)



Jetzt sind Sie dran: Resonanz & Grenzfälle (zu zweit)

Aufgabe 21

Ein Serienschwingkreis besteht aus $R = 50 \, \Omega$, $L = 20 \, \text{mH}$, $C = 50 \, \mu\text{F}$.

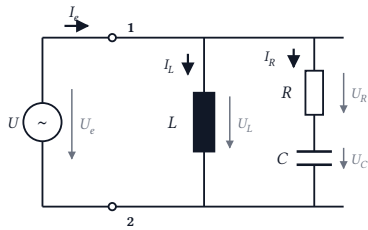
- Bei welcher Kreisfrequenz ω_0 (und Frequenz f_0) nimmt die Schaltung nur Wirkleistung auf?
- Wie groß ist $\underline{Z}$ bei ω_0 ?
- Welche Impedanzcharakteristik hat die Schaltung bei $\omega = \omega_0/2$? (Begründung!)
- Geben Sie $\underline{Z}$ für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ an. Was macht diese Schaltung mit sehr langsamen und sehr schnellen Signalen?



Klausuraufgabe: Zweipol (zu zweit)

$\underline{U} = 8 \, \text{V} \cdot e^{j\pi/2}$ (komplexer Effektivwert); $R = 0,8 \, \text{k}\Omega$, $L = 16 \, \text{mH}$. Bei $\omega_g = 5 \cdot 10^4 \, \text{s}^{-1}$ nimmt die Schaltung $\underline{S} = 40(1 + j) \, \text{mVA}$ auf. (C ist nicht gegeben – Sie brauchen es nicht!)

- Berechnen Sie $\underline{I}_e$. Welche Impedanzcharakteristik liegt vor (Begründung)?
- Berechnen Sie $\underline{Z}_e$ und $\underline{Y}_e$.
- Berechnen Sie $\underline{I}_L$, dann $\underline{I}_R$ und $\underline{U}_R$, dann $\underline{U}_C$.
- Zeichnen Sie** $\underline{I}_e$, $\underline{I}_L$, $\underline{U}_e$, $\underline{U}_R$, $\underline{U}_C$ als Effektivwertzeiger.
- Geben Sie $\underline{I}_e$, $\hat{I}_e$ und φ_i an.
- Bei ω_0 nimmt der Zweipol nur Wirkleistung auf – wie heißt dieser Arbeitspunkt? Geben Sie $\underline{Z}_e$ für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ an.

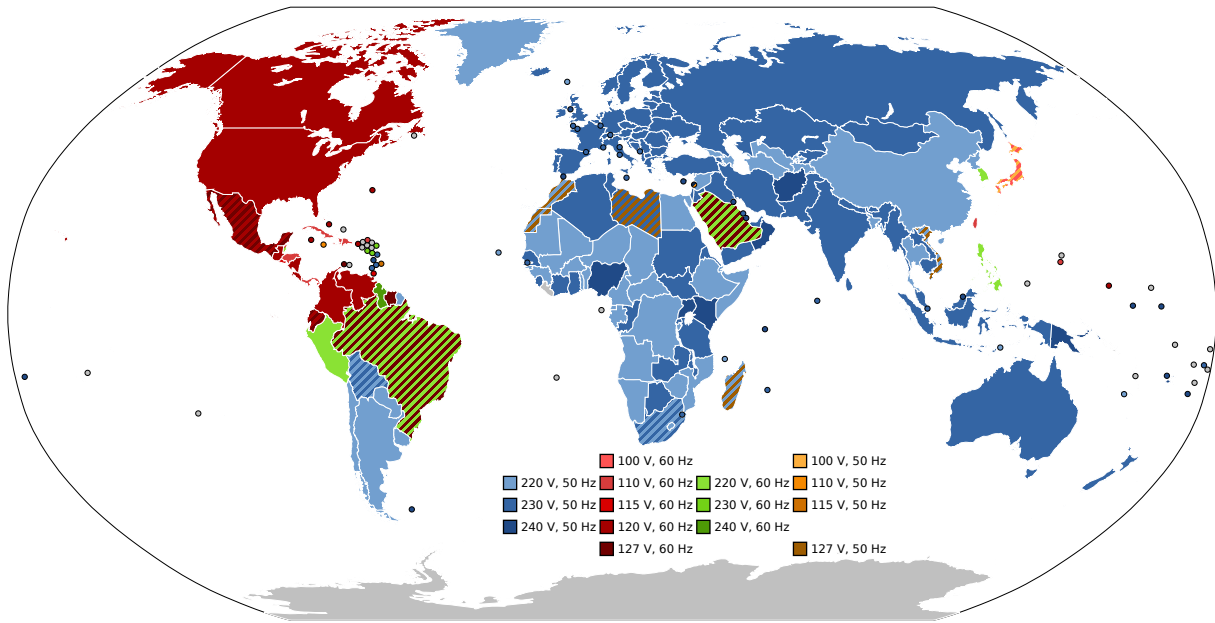


Zusammenfassung: Wechselstrom

- Kennwerte: Mittelwert, Gleichrichtwert, **Effektivwert** ($\hat{A}/\sqrt{2}$ nur für Sinus!)
- Komplexe Rechnung: Festzeiger, $e^{j\omega t}$ kürzt sich; addieren kartesisch, multiplizieren polar
- Impedanzen: $\underline{Z}_R = R$, $\underline{Z}_L = j\omega L$, $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$ – alle DC-Methoden gelten weiter
- Leistung: $P = UI \cos \varphi$, $Q = UI \sin \varphi$, $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ$
- Kompensation: Kondensator **parallel**, $Q_C = P(\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2)$
- Resonanz:** $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\underline{Z}$ reell; Grenzfälle: C/L $\leftrightarrow$ Unterbrechung/Kurzschluss

Nächstes Kapitel: Drehstrom – warum aus der Steckdose eigentlich drei Phasen kommen 🌩️

Wechselstrom: Niederspannung weltweit



Gruppenarbeit: Westinghouse vs. Edison reloaded

Mit Ihrem jetzigen Wissen über Wechselstrom und Gleichstrom, Wirkleistung und Blindleistung, diskutieren Sie in Ihrer Gruppe die Vor- und Nachteile der beiden Stromsysteme:

- Edison  : Gleichstrom mit 110 V
- Westinghouse  : Wechselstrom mit 110 V, auf längere Strecken transformiert auf > 1000 V

Hinweise: Leitungsverluste (inkl. Blindleistung), Sicherheit, Wirtschaftlichkeit

Zusatzfrage: Würde die Entscheidung heute anders ausfallen?